

ბვირფასო სტუდენტებო,  
 დავალების შესრულების დაწყებამდე,  
 გთხოვთ, ჯერ გაეცნოთ განმარტებით წერილს

მათემატიკა ეკონომიკისა და ბიზნესისათვის 2

## დავალება № 22. დიფერენციალური განტოლებები

ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში მოცემული სავარჯიშოები აღებულია სილაბუსში მითითებული [2] სალექციო კურსიდან, კერძოდ, ლექცია 22-ის ბოლო პუნქტში მოყვანილი სავარჯიშოებიდან. გამუქებულია იმ ტიპური სავარჯიშოების ნომრები, რომელთა ამოხსნები გადმოცემულია აქ. გაეცანით ამ ამოხსნებს, დანარჩენი სავარჯიშოები კი შეასრულეთ დამოუკიდებლად.

სავარჯიშოების პირობები და პასუხები იხილეთ [2]-ში.

სავარჯიშოები №

|         |       |             |              |        |        |
|---------|-------|-------------|--------------|--------|--------|
| 1-ა     | 1-ბ   | 2-ა,გ,ე,ზ,ი | 2-ბ,დ, ვ,თ,კ | 3-ა, გ | 3-ბ, დ |
| 4-ა,გ,ე | 4-ბ,დ | 5-ა, გ      | 5-ბ,დ,ე      | 6-ა,გ  | 6-ბ,დ  |

### ტიპური სავარჯიშოების ამოხსნა

1. იპოვეთ  $f(x)$ , თუ:

ა)  $y = 2\sin x$  წარმოადგენს  $y' - y\cos x = f(x)$  განტოლების ამონახსნს.

**ამოხსნა**

რადგან  $y' = (2\sin x)' = 2\cos x$ , ამიტომ  $f(x) = 2\cos x - 2\sin x \cdot \cos x = 2\cos x - \sin 2x$ .

**პასუხი:**  $f(x) = 2\cos x - \sin 2x$ .

2. იპოვეთ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი:

ა)  $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 5x - 6$ ;

**ამოხსნა**

განტოლების ორივე მხარის ინტეგრებით მივიღებთ:

$$\int \left(\frac{dy}{dx}\right) dx = \int (3x^2 + 5x - 6) dx;$$

$$y = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 6x + c.$$

**პასუხი:**  $y = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 6x + c$ .

ბ)  $\frac{dy}{dx} = 3y$ ;

**ამოხსნა**

განტოლება ჩავწერთ ტოლფასი  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3y}$  სახით და ვაინტეგრით ორივე მხარე:

$$\int \left(\frac{dx}{dy}\right) dy = \int \left(\frac{1}{3y}\right) dy;$$

$$x = \frac{1}{3} \ln y + c;$$

**პასუხი:**  $x = \frac{1}{3} \ln y + c$ .

ე)  $\frac{dy}{dx} = e^y$ ;

**ამოხსნა**

განტოლება ჩავწეროთ ტოლფასი  $\frac{dx}{dy} = e^{-y}$  სახით და ვაინტეგრროთ ორივე მხარე:

$$\int \left(\frac{dx}{dy}\right) dy = \int (e^{-y}) dy;$$

$$x = -e^{-y} + c;$$

$$x + e^{-y} = c;$$

**პასუხი:**  $x + e^{-y} = c$ .

ზ)  $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ ;

**ამოხსნა**

განტოლება ჩავწეროთ ტოლფასი  $y dy = x dx$  სახით და ვაინტეგრროთ ორივე მხარე:

$$\int y dy = \int x dx;$$

$$\frac{1}{2}y^2 + c_1 = \frac{1}{2}x^2 + c_2;$$

მარტივი გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ:  $y^2 - x^2 = c$ .

**პასუხი:**  $y^2 - x^2 = c$ .

ო)  $\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$ ;

**ამოხსნა**

განტოლება ჩავწეროთ ტოლფასი  $\frac{1}{\sqrt{y}} dy = \sqrt{x} dx$  სახით და ვაინტეგრროთ ორივე მხარე:

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \int \sqrt{x} dx;$$

$$2\sqrt{y} + c_1 = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c_2;$$

მარტივი გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ:  $3\sqrt{y} - \sqrt{x^3} = c$ .

**პასუხი:**  $3\sqrt{y} - \sqrt{x^3} = c$ .

**3. იპოვეთ განცალკევად ცვლადებიანი განტოლების ზოგადი ამონახსნი:**

ა)  $y^2 y' - 5x = 0$ ;

**ამოხსნა**

გავითვალისწინოთ, რომ  $y' = \frac{dy}{dx}$  და განტოლება ჩავწეროთ ტოლფასი  $y^2 dy = 5x dx$  სახით.

ვაინტეგრროთ ორივე მხარე:

$$\int y^2 dy = \int 5x dx;$$

$$\frac{1}{3}y^3 + c_1 = \frac{5}{2}x^2 + c_2;$$

მარტივი გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ:  $2y^3 - 15x^2 = c$ .

**პასუხი:**  $2y^3 - 15x^2 = c$ .

გ)  $5y^4 y' - 2x^{3/2} = 0$ ;

**ამოხსნა**

გავითვალისწინოთ, რომ  $y' = \frac{dy}{dx}$  და განტოლება ჩავწეროთ ტოლფასი  $5y^4 dy = 2x^{3/2} dx$  სახით.

ვაინტეგრროთ ორივე მხარე:

$$\int 5y^4 dy = \int 2x^{3/2} dx;$$

$$y^5 + c_1 = \frac{4}{5}x^{5/2} + c_2;$$

მარტივი გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ:  $5y^5 - 4\sqrt{x^5} = c$ .

**პასუხი:**  $5y^5 - 4\sqrt{x^5} = c$ .

4. იპოვეთ დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ პირობას:

ა)  $\frac{dy}{dx} = e^{5x}$ ;  $y = 1$ , როცა  $x = 0$ ;

**ამოხსნა**

ვინტეგრით განტოლების ორივე მხარე:  $\int \left(\frac{dy}{dx}\right) dx = \int (e^{5x}) dx$ ;  
 $y = \frac{1}{5}e^{5x} + c$ ;

საწყისი პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ:  $1 = \frac{1}{5}e^0 + c$ ;  $c = \frac{4}{5}$ ; შესაბამისად,  $y = \frac{1}{5}e^{5x} + \frac{4}{5}$ ;

**პასუხი:**  $y = \frac{1}{5}e^{5x} + \frac{4}{5}$ .

ბ)  $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2}$ ;  $y = 3$ , როცა  $x = 2$ ;

**ამოხსნა**

განტოლება ჩავწერთ ტოლფასი  $y^2 dy = x dx$  სახით და ვინტეგრით ორივე მხარე:

$$\int y^2 dy = \int x dx$$

$$\frac{1}{3}y^3 + c_1 = \frac{1}{2}x^2 + c_2$$

მარტივი გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ:  $2y^3 - 3x^2 = c$ ; საწყისი პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ:  $2 \cdot 3^3 - 3 \cdot 2^2 = c$ ;  $c = 42$ ; შესაბამისად,  $2y^3 - 3x^2 = 42$ ;

**პასუხი:**  $2y^3 - 3x^2 = 42$ .

გ)  $\frac{dy}{dx} = y^2 \sqrt{4-x}$ ;  $y = 2$ , როცა  $x = 4$ .

**ამოხსნა**

განტოლება ჩავწერთ ტოლფასი  $\frac{1}{y^2} dy = \sqrt{4-x} dx$  სახით და ვინტეგრით ორივე მხარე:

$$\int y^{-2} dy = \int \sqrt{4-x} dx$$

$$-\frac{1}{y} + c_1 = -\frac{2}{3}(4-x)^{3/2} + c_2$$

მარტივი გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ:  $\frac{1}{y} - \frac{2}{3}(4-x)^{3/2} = c$ ; საწყისი პირობების გათვალისწინებით მივიღებთ:  $\frac{1}{2} - \frac{2}{3}(4-4)^{3/2} = c$ ;  $c = \frac{1}{2}$ ; შესაბამისად,  $\frac{1}{y} - \frac{2}{3}(4-x)^{3/2} = \frac{1}{2}$ ;

**პასუხი:**  $\frac{1}{y} - \frac{2}{3}(4-x)^{3/2} = \frac{1}{2}$ .

5. ამოხსენით პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება:

ა)  $y' + 2y + 3 = 0$

**ამოხსნა**

$y' + P(x)y = Q(x)$  პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:  $y = e^{-\int P(x)dx} (C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx)$ . განტოლება ჩავწერთ  $y' + 2y = -3$  სახით და გამოვიყენოთ აღნიშნული ფორმულა:

$$y = e^{-\int 2dx} (C + \int (-3)e^{\int 2dx} dx) = e^{-2x} (C + \int (-3)e^{2x} dx) = e^{-2x} (C - \frac{3}{2}e^{2x}) = e^{-2x}C - 1,5.$$

**პასუხი:**  $y = e^{-2x}C - 1,5$ .

ბ)  $y' - 3y = 2e^{3x} - 3$ ;

**ამოხსნა**

იგივე ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ:  $y = e^{\int 3dx} (C + \int (2e^{3x} - 3)e^{-\int 3dx} dx)$ ;

$$y=e^{3x}(C + \int(2e^{3x} - 3)e^{-3x}dx) = e^{3x}(C + \int(2 - 3e^{-3x})dx) = e^{3x}(C + 2x + e^{-3x});$$

**პასუხი:**  $y = e^{3x}(C + 2x + e^{-3x});$

6. იპოვეთ მუდმივკოეფიციენტებიანი მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი:

ა)  $y'' + 7y' - 8y = 0$  ;

**ამოხსნა**

დავწეროთ შესაბამისი მახასიათებელი განტოლება:  $r^2 + 7r - 8 = 0$  ; რადგან მახასიათებელ განტოლებას აქვს  $r = 1$  და  $r = -8$  ორი განსხვავებული ფესვი, ამიტომ მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი ჩაიწერება ფორმულით:  $y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} = c_1e^x + c_2e^{-8x};$

**პასუხი:**  $y = c_1e^x + c_2e^{-8x}.$

გ)  $y'' - 2y' + y = 0$  ;

**ამოხსნა**

დავწეროთ შესაბამისი მახასიათებელი განტოლება:  $r^2 - 2r + 1 = 0$  ; რადგან მახასიათებელ განტოლებას აქვს ერთი ფესვი (ჯერადი ფესვი) და ეს ფესვია  $r = 1$  , ამიტომ მოცემული განტოლების ზოგადი ამონახსნი ჩაიწერება ფორმულით:  $y = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx} = c_1e^x + c_2xe^x;$

**პასუხი:**  $y = c_1e^x + c_2xe^x.$